VJEŽBE IZ MATEMATIKE 2

Ivana Baranović
Miroslav Jerković

Lekcija 5

Primjena određenog integrala

Poglavlje 1

Primjene određenog integrala

1.1 Površina ravninskog lika

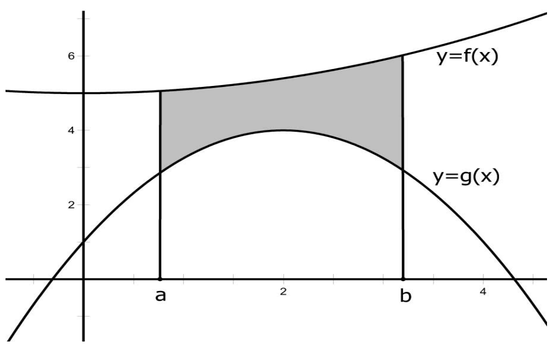
Za dani ravninski lik omeđen krivuljama $y = f(x)$ i $y = g(x)$ te pravcima $x = a$ i $x = b$ treba odrediti njegovu površinu P (vidi sliku). Koristimo činjenicu da je površina tog lika jednaka razlici površina lika omeđenog pravcima $x = a$, $x = b$, osi x i krivuljom $y = f(x)$ te lika omeđenog s $x = a$, $x = b$, osi x i krivuljom $y = g(x)$. Zaključujemo:

$$P = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx,$$

tj.

$$P = \int_a^b (f - g)(x)dx.$$

Ova jednostavna formula temelj je računa površina ravninskih likova gore opisanog tipa.

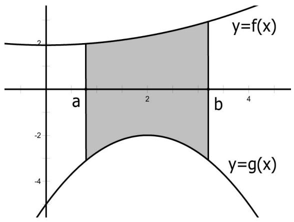


Slika 1.1: Površina P jednaka je razlici površina određenih grafovima Γ_f i Γ_g

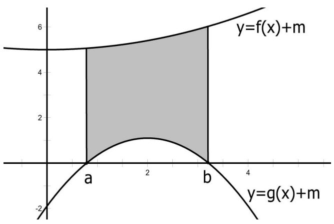
Gornja formula vrijedi i u slučaju da nije $f(x) \geq 0$ i $g(x) \geq 0$ za sve $x \in [a, b]$, ali uz uvjet da je $f(x) - g(x) \geq 0$ za sve $x \in [a, b]$. Naime, prema slici je očito da možemo translatirati krivulje Γ_f i Γ_g duž $y-$osi koliko je potrebno (recimo za neku veličinu m) do situacije sa slike 2.1., na kojoj su sve vrijednosti funkcija f i g na intervalu $[a, b]$ nenegativne (vidi sliku 2.2.). Naime, tada se površina P koju tražimo očito neće promijeniti, a možemo primijeniti poznatu formulu:

$$P = \int_a^b [f(x) + m]dx - \int_a^b [g(x) + m]dx = \int_a^b (f - g)(x)dx.$$

Dakle, možemo primijeniti već postojeću formulu čak i u slučaju da nisu sve vrijednosti podintegralnih funkcija na intervalu integracije nenegativne.



$\Downarrow$



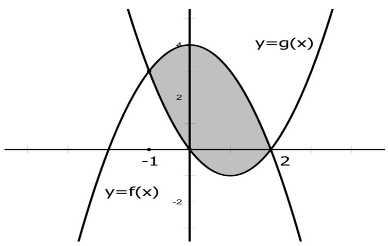
Slika 1.2: Formulu razlike površina možemo primijeniti i na funkcije kojima nisu sve vrijednosti na integracijskom području nenegativne.

Primjer 1

Izračunajte površinu područja ograničenog s $y = 4 - x^2$ i $y = x^2 - 2x$.

Rješenje:

Grafovi ovih funkcija omeđuju lik (označimo mu površinu s P) određen točkama presjeka ovih krivulja, a to su točke s apscisama $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$ – vidi sliku. Označimo $f(x) := 4 - x^2$ ("gornja funkcija"), $g(x) := x^2 - 2x$ ("donja funkcija").



Sada je

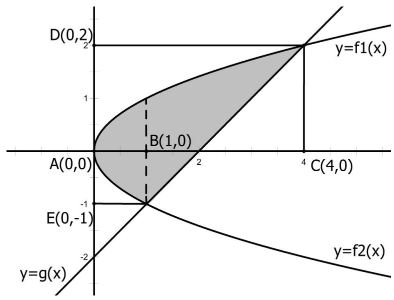
$$\begin{aligned} P &= \int_{-1}^{2} (f-g)(x)dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2+2x+4)dx = \\ &= (-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x)|_{-1}^{2} = 9. \end{aligned}$$

Primjer 2

Izračunajte površinu P omeđenu krivuljama $y^2 = x$ i $y = x - 2$.

Rješenje:

Formula koju smo do sada primjenjivali podrazumijevala je da funkcije čiji grafovi omeđuju ravninski lik čiju površinu tražimo možemo eksplicitno napisati u integracijskoj varijabli. Ovdje moramo uočiti da krivulja $y^2 = x$ ima dva kraka (dvije mogućnosti za eksplicitni zapis), $f_1(x) := \sqrt{x}$ i $f_2(x) := -\sqrt{x}$. Ako nacrtamo sliku, vidjet ćemo da uz korištenje ovako zapisanih podintegracijskih funkcija možemo primijeniti poznatu formulu.



Vrijedi:

$$\begin{aligned} P &= \int_{0}^{1} (\sqrt{x} - (-\sqrt{x}))dx + \int_{1}^{4} (\sqrt{x} - (x-2))dx = \\ &= 2(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}})|_{0}^{1} + (\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x)|_{1}^{4} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Međutim, postoji i jednostavniji način da se ovaj zadatak riješi. Naime, ako već ne možemo iz $y^2 = x$ dobiti eksplicitni izraz za y kao funkciju od x, možemo obratno $-$ eksplicitno izraziti x pomoću y: $x = y^2$. Također, iz $y = x - 2$ izlazi $x = y + 2$, a iz slike je odmah vidljivo da je integraciju po varijabli y lakše provesti, jer "gledano sa strane osi y" vidimo da se radi o dvjema funkcijama u varijabli x koje na intervalu integracije (sada zadanom donjom granicom $y = -1$ i gornjom granicom $y = 2$) poprimaju samo nenegativne vrijednosti, pa imamo

$$P = \int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2)dy = (-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 2y)|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

Sada možemo napisati još jednu formulu: za funkcije f i g zadane u varijabli y na intervalu $[c,d]$ površina P lika omeđenog krivuljama Γ_f i Γ_g te pravcima

$y = c$ i $y = d$ je dana s

$$P = \int_c^d (f - g)(y) dy.$$

Ponekad je pri rješavanju zadataka s površinama pogodnije preći na polarne koordinate, kao u sljedećem primjeru. Ako pritom računamo površinu lika određenog krivuljama $r = r_1(\varphi)$ i $r = r_2(\varphi)$ te rubnim polupravcima integracijskog područja $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, koristit ćemo sljedeću formulu:

$$P = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} ({r_1}^2 - {r_2}^2) d\varphi.$$

Za vježbu ćemo riješiti pomoću ove formule i jedan zadatak koji se inače može lako riješiti elementarnim metodama.

Primjer 3

Koristeći određeni integral izračunajte površinu P određenu krivuljama zadanim jednadžbama $x^2 + y^2 + 8x = 0$, $x^2 + y^2 + 4x = 0$.

Rješenje:

Nakon što transformiramo jednadžbe ovih krivulja vidimo da se radi o kružnicama:

$x^2 + y^2 + 8x = 0 \;\; / + 16 \Rightarrow (x + 4)^2 + y^2 = 4^2$

$x^2 + y^2 + 4x = 0 \;\; / + 8 \Rightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 2^2$,

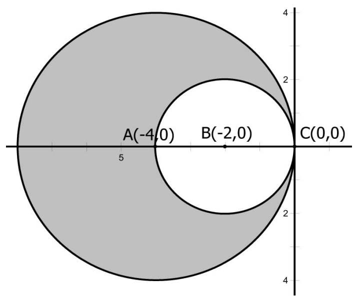
i to kružnicama sa središtima u $(-4, 0)$ i $(-2, 0)$ te radijusima $r_1 = 4$ i $r_2 = 2$, redom.

Transformirajmo ove jednadžbe u polarni oblik korištenjem formula $x = r \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$. Dobiva se:

$r_1 = 8 \cos\varphi$ za prvu kružnicu i

$r_2 = 4 \cos\varphi$ za drugu kružnicu.

Treba još odrediti granice integracijskog područja. Sa slike se vidi da je $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$, pa je

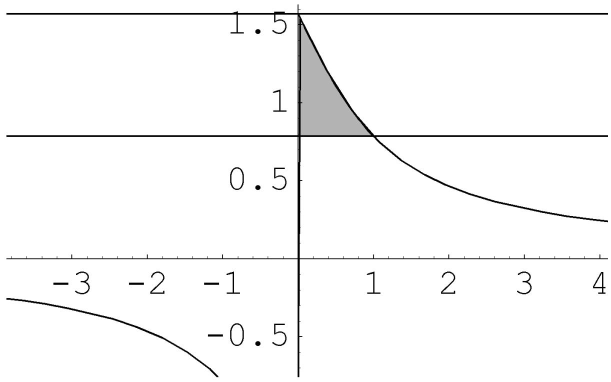


$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} ((8 \cos\varphi)^2 - (4 \cos\varphi)^2) d\varphi = 24 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = \\ &= 24 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos 2\varphi + 1}{2} d\varphi = 24 \cdot \frac{1}{2} (\frac{\sin 2\varphi}{2} + \varphi)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 12\pi. \end{aligned}$$

Primjer 4 Koristeći određeni integral izračunajte površinu P određenu krivuljama zadanim jednadžbama $x = 0$, $y = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, $y = \frac{\pi}{4}$.

Rješenje:

Prvo skiciramo zadane krivulje i uzmemo u obzir $\lim_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (jer $\frac{1}{x}$ ide u nulu) te $\lim_{x\to 0} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ (jer $\frac{1}{x}$ ide u $+\infty$) Sada je površina dana s (radi se o nepravom integralu):



$$\begin{aligned} P &= \int_0^1 \left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4}\right) dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4}\right) dx = \\ &= \lim_{a\to 0}\left(x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\pi}{4}x\Big|_a^1\right) = \\ &= \lim_{a\to 0}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} - a\arctan\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{2}\ln(1+a^2) + \frac{\pi}{4}a\right) = \frac{1}{2}\ln 2 \end{aligned}$$

pri čemu smo uzeli u obzir da je

$$\begin{aligned} \int \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & dv = dx \\ du = -\frac{1}{1+x^2} & v = x \end{array} \right| = x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \int \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \end{aligned}$$

i

$$\lim_{a\to 0} a\arctan\frac{1}{a} = 0\cdot\frac{\pi}{2} = 0$$

Zadatak 1 Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama:

(1) $y = x^2$, $y = 4x$

(2) $y = x^2 - 1$, $y = 4|x| - 5$

(3) $y = x(x-1)(x-2)$ i $x-$osi.

(4) $y = \frac{\pi}{6}$, $y = \arcsin\frac{1}{x}$

(5) $y = x^2$, $y = x^3 - 2x$

(6) $x^2 + y^2 = 2x + 2y$ i nejednakostima $x \geq 0$, $y \geq 0$

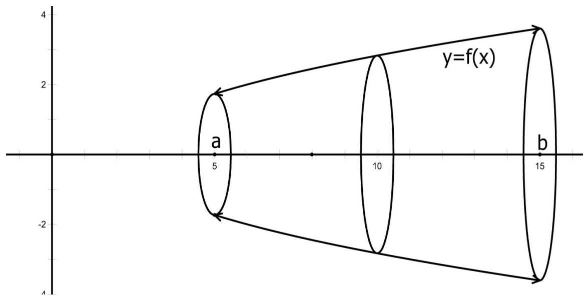
(7) $4x^2 - 7y^2 = 20$, $4y^2 - x^2 = 4$

(8) $4x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + 4y^2 = 4$

(9) $y = x \arctan x^3$, $y = \frac{\pi}{4}|x|$

1.2 Volumen rotacijskog tijela

Graf funkcije f rotiramo oko $x-$osi. Postavlja se pitanje: koji je volumen V tijela dobivenog rotacijom lika određenog dijelom grafa funkcije f te pravcima $x = a$, $y = b$ i $x-$ osi (vidi sliku)?



Odgovor daje sljedeća formula:

$$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Međutim, postoji formula i za rotaciju lika određenog grafom funkcije f na intervalu $[a, b]$ na $x-osi$ *oko* $y-osi$. Ta formula glasi:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Također, ako imamo funkciju $x = g(y)$ (gdje je x eksplicitno izražen preko y) i rotacijski interval $[c, d]$ na $y-osi$ te rotiramo oko $y - osi$, imat ćemo:

$$V_y = \pi \int_c^d g(y)^2 dy.$$

Ako rotiramo lik određen grafom funkcije f na intervalu $[c, d]$ na $y-osi$ *oko* $x-osi$, imat ćemo formulu

$$V_x = 2\pi \int_c^d g(y) y dy.$$

Sažeto ove četiri formule možemo pregledno iskazati jednom tablicom:

integr. po $\downarrow$ / rot. oko $\rightarrow$	$x-$osi	$y-osi$
$[a,b]$ na $x-$osi	$V_x = \pi\int_a^b f(x)^2dx$	$V_y = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$
$[c,d]$ na $y-$osi	$V_x = 2\pi\int_c^d g(y)ydy$	$V_y = \pi\int_c^d g(y)^2dy$

Također, imamo i formulu za volumen rotacijskog tijela koje je dobiveno rotacijom područja *između* dviju krivulja. U tom slučaju koristimo slične formule kao u gornjoj tablici, uz primjenu modela iz dijela o površini područja omeđenog dvjema krivuljama. Npr. za volumen V tijela nastalog rotacijom područja omeđenog krivuljama $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ na intervalu $[a,b]$ oko $x-$osi koristimo formulu

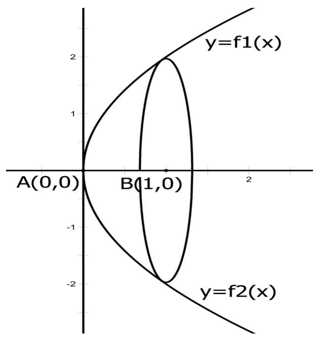
$$V = \pi\int_a^b (f_1(x)^2 - f_2(x)^2)dx$$

i slično za ostale formule.

Primjer 5

Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom oko $x-$osi lika omeđenog parabolom $y^2 = 4x$ i pravcem $x = 1$.

Rješenje:



Naša funkcija nije eksplicitno izražena preko integracijske varijable x, ali to formula niti ne zahtijeva: imamo $y^2 = f(x)$, što je upravo izraz koji se traži u formuli.

Očito je sa slike da moramo koristiti formulu za integraciju duž intervala $[0,1]$ na $x-$osi za rotaciju oko $x-$osi, pa imamo

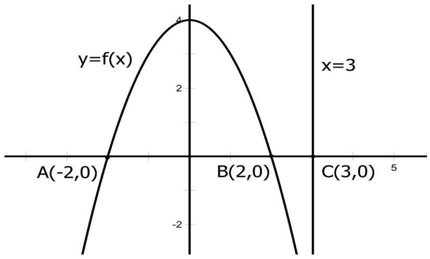
$$V_x = \pi\int_0^1 y^2dx = \pi\int_0^1 4xdx = 2\pi(x^2)|_0^1 = 2\pi.$$

Ponekad se zadaje rotacija oko pravaca paralelnih s $x-$osi, odnosno s $y-$osi. U tom slučaju primjenjujemo iste formule, ali moramo izvršiti translaciju cjelokupnog koordinatnog sustava, kao u donjem primjeru.

Primjer 6

Izračunajte volumen V tijela nastalog rotacijom oko pravca $x = 3$ lika omeđenog parabolom $y = 4 - x^2$ i $x-$osi.

Rješenje:



Rotacija oko pravca $x = 3$ znači da ćemo zahtijevati da u točki $\tilde{O}(3,0)$ bude ishodište novog koordinatnog sustava $(\tilde{O}, \tilde{x}, \tilde{y})$ čija je veza sa starim dana s $\tilde{x} = x - 3$, $\tilde{y} = y$. Tako u novom koodinatnom sustavu točka $(3,0)$ (zapisana u starom sustavu) postaje $(0,0)$. Formulu za volumen primijenit ćemo u odnosu na novi sustav. To znači da trebamo napisati nove granice integracije, novu podintegralnu funkciju i novi diferencijal u skladu s gornjim transformacijskim formulama $(x,y) \to (\tilde{x}, \tilde{y})$.

Kako se radi o rotaciji oko pravca $x = 3$, a to je pravac paralelan s $y-$osi, riječ je u biti o rotaciji oko novonastale $\tilde{y}-$osi, pa primjenjujemo formulu za V_y.

Još se trebamo odlučiti koju ćemo integraciju koristiti. S obzirom da se transformacijom koordinatnog sustava ne mijenjaju $y-$koordinate (jer je $\tilde{y} = y$), a samim time niti diferencijal, koristit ćemo za integraciju duž $\tilde{y}-$osi.

Volumen V izrazimo kao razliku volumena V_1 i V_2 koji se dobiju rotacijom redom lijevog, odnosno desnog kraka parabole oko $\tilde{y}-$osi. Očito je još preostalo samo da funkcijski izrazimo lijevi i desni krak u novim koordinatama, i to u smislu ovisnosti $\tilde{x}$ o $\tilde{y}$ (jer integriramo duž $\tilde{y}-$osi).

Lijevi krak: u starim koordinatama riječ je funkcijskoj vezi $x = g_1(y) = -\sqrt{4-y}$, a kako je $x = \tilde{x} + 3, y = \tilde{y}$, u novim koordinatama veza glasi $g_1(\tilde{y}) = -\sqrt{4-\tilde{y}} - 3$.

Desni krak: slično kao za lijevi krak u starim koordinatama imamo $x = g_2(y) = \sqrt{4-y}$, a u novim $g_2(\tilde{y}) = \sqrt{4-\tilde{y}} - 3$.

Računamo sada volumen:

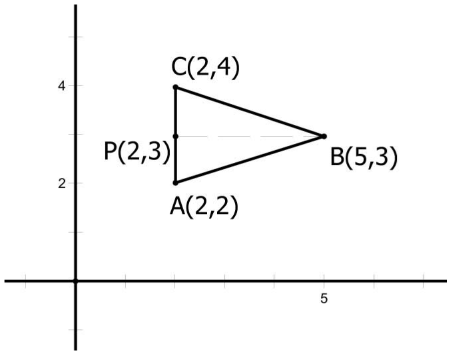
$$
\begin{aligned}
V &= V_1 - V_2 = \pi \int_0^4 (g_1(\tilde{y})^2 - g_2(\tilde{y})^2) d\tilde{y} = \\
&= \pi \int_0^4 ((-\sqrt{4-\tilde{y}} - 3)^2 - (\sqrt{4-\tilde{y}} - 3)^2) d\tilde{y} = \\
&= 12\pi \int_0^4 \sqrt{4-\tilde{y}} d\tilde{y} = 8\pi \\
&= 64\pi.
\end{aligned}
$$

Primjer 7

Trokut zadan vrhovima $A(2,2), B(5,3), C(2,4)$ rotira oko $y-$osi. Odredite volumen V nastalog tijela.

Rješenje:

Sa slike vidimo da se radi o trokutu simetričnom obzirom na pravac $y = 3$, pa volumen V možemo računati kao dvostruki volumen V_1 lika nastalog rotacijom



"donje polovice" trokuta određene s dva pravca: prvi pravac prolazi točkama A i B (pravac $y = 3x - 4$), a drugi točkama A i P (pravac $x = 2$).

"Gornja" funkcija (gledano s $y-$osi) dana je s $x = g_1(y) = \frac{y+4}{3}$, a "donja" s $x = g_2(y) = 2$. Očito je integracijsko područje dano s $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, pa imamo

$$\begin{aligned} V &= 2V_1 = 2\pi \int_2^3 (g_1(y)^2 - g_2(y)^2)dy = \\ &= 2\pi \int_2^3 ((\frac{y+4}{3})^2 - 4)dy = \frac{2\pi}{3}(\frac{y^3}{3} + 4y^2 + 4y)|_2^3 = \frac{182}{9}\pi. \end{aligned}$$

Zadatak 2

(1) Područje određeno krivuljama $y^2 = x$, $3y^2 = 2(x+2)$ rotira oko $x-$osi. Izračunajte volumen tako dobivenog tijela.

(2) Odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom lika određenog sa $\sin x + 1 \leq y \leq 1$, $\pi \leq x \leq 2\pi$ oko $x-$osi.

(3) Nađite volumen tijela nastalog rotacijom kružnice $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ oko osi x $(b > a)$.

(4) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom krivulje $x^2 + y^2 = 2x + 2y$ oko $x-$osi.

Zadatak 3

(1) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja $(x-1)^2 \leq y \leq \sqrt{x-1}$ oko $y-$osi.

(2) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja $y \leq x \leq 5y, y^2 \leq 6 - x$ oko osi y.

(3) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja $\frac{3}{5\pi}|x| \leq y \leq |\sin x|$ oko $y-$osi.

(4) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja zadanog nejednadžbama $1 + \sin x \leq y \leq 1$, $\pi \leq x \leq 2\pi$ oko $y-$osi.

(5) Skup određen krivuljama $x^2 + y^2 = 2x,\ y = 2x,\ y = x/\sqrt{3}$ rotira oko $y-$osi. Izračunajte volumen dobivenog tijela.

(6) Odredite volumen tijela nastalog rotacijom područja $y^2 \leq (2-x)(4+x)$ oko y osi.

(7) Odredite volumen tijela nastalog rotacijom krivulje $(y-2)^2 = x(4-x)$ oko $y-$osi.

Zadatak 4

(1) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja $0 \leq y \leq \sin x$, $x \in [0, \pi]$ oko pravca $y = 2$.

(2) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja $-1 \leq y \leq \sin x$ $x \in [0, 2\pi]$ oko pravca $y = 2$.

(3) Lik određen krivuljama $y = \sqrt{x}$, $y = x$, $x \in [0, 4]$ rotira oko pravca $x = 1$. Izračunajte volumen tako dobivenog tijela.

(4) Odredite volumen tijela nastalog rotacijom krivulje $y^2 = x(4-x)$ oko pravca $x = 1$.